12/12/11

ΠΡΟΤΑΣΗ: (ΥΠΕΡΠΕΡΑΣ ΕΠΑΓΩΓΗ)

Ας είναι $(E, \leq)$ καλά διατεταγμένο σύνολο με $\min E = a$ και $p(x)$ προτασιακός τύπος με σύνολο αναφοράς του E.

Υποθ. ότι i) $P(a)$ αληθής

ii) αν $p(x)$ αληθής $\left.\begin{array}{l}\forall x \in E \\ x < y\end{array}\right\} \Rightarrow P(y)$ αληθής

Τότε $P(x)$ αληθής $\forall x \in E$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Ας είναι $A = \{x \in E : P(x)\}$ το $A = \phi$ $\{P(a) \Rightarrow a$

αν $A = E$.

Έστω ότι $A \neq E \Rightarrow A^c \neq \emptyset$. Επειδή το E είναι καλά διατεταγμένο $\exists\, b = \min A^c \in A^c$.

Διακρίνω δύο περιπτώσεις:

a) $\forall x \in E : x < b \Rightarrow P(x)$

b) $\exists x$ με $x < b$ και $\sim P(x)$

α) $\forall x \in E : x < b \Rightarrow P(x)$

$\Rightarrow P(b)$ αληθής

$\Rightarrow b \in A$

Όμως $b \in A^c$, άτοπο!

β) $\exists x$ με $x \in B$ και $\sim P(x)$

$\Rightarrow x \in A^c \Rightarrow b \leq x$ άτοπο

ΠΡΟΤΑΣΗ: (Πεπ. επαγωγή) Ας είναι $P(\ )$ προτασιακός τύπος με σύνολο αναφοράς το $\mathbb{N}$.
Υποθέτω ότι
(i) $P(1)$ αληθής
(ii) $\forall x \in \mathbb{N}$ με $P(x)$ αληθής $\Rightarrow P(x+1)$ αληθής
Τότε η $P(x)$ είναι αληθής $\forall x \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-x,\ x \in \mathbb{N}\}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ: $z \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \exists\, m, n \in \mathbb{N} : z = m - n$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $(\Rightarrow)$ Ας είναι $z \in \mathbb{Z}$

(i) $z \in \mathbb{N}$ τότε $z+1 \in \mathbb{N}$ και $z = (z+1)+1$

(ii) $z = 0$ τότε $z = 1 - 1$

(iii) $z = -k,\ k \in \mathbb{N}$ τότε $k+1 \in \mathbb{N}$ και $z = -k = 1 - (k+1)$

$(\Leftarrow)$ Αρχικά, θα αποδείξω ότι $z \in \mathbb{Z} \Rightarrow z - 1 \in \mathbb{Z}$

Πράγματι, i) $0 - 1 = -1 \in \mathbb{Z}$ $\left(\begin{array}{c}\text{ισχύει για} \\ z=0\end{array}\right)$

ii) $z = n \in \mathbb{N}$ $\quad n = 1 \Rightarrow 1 - 1 = 0 \in \mathbb{Z}$

iii) $z = -k,\ k \in \mathbb{N}$ τότε $z - 1 = -k - 1$
$= -(k+1) \in \mathbb{Z}$
με $k+1 \in \mathbb{N}$

Για $n \in \mathbb{N}$, θεωρείται σύνολο $A_n = \{x \in \mathbb{N} : n - x \in \mathbb{Z}\}$
αρκεί ν.δ.ο. A_n = επαγωγικό.

Για $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n-1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 1 \in A_n$

Επίσης, αν $x \in A_n \Rightarrow n-x \in \mathbb{Z} \Rightarrow n-x-1 \in \mathbb{Z}$

$n-(x+1) \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$x+1 \in A_n$

άρα A_n επαγωγικό

ΠΡΟΤΑΣΗ: (i) $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \pm y,\ x, y \in \mathbb{Z}$

(ii) $\mathbb{N} = \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Z}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: (i) $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow \exists\ m, n, k, \lambda \in \mathbb{N}$

$x = m-n$

$y = k-\lambda$

(ii) $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Z} = \mathbb{R}^+ \cap \{\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-x, x \in \mathbb{N}\}\}$

$= (\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{N}) \cup (\mathbb{R}^+ \cap \{0\}) \cup \{\mathbb{R}^+ \cap \{-x, x \in \mathbb{N}\}\}$

ΛΗΜΜΑ: Για $x, y \in \mathbb{Z}$, $y \neq 0$, $\exists q \in \mathbb{Z} : x - yq > 0$

Απόδειξη: (i) $y > 0$: Για $q = -(1+|x|)$ έχουμε

$x - yq = x - y[-(|x|+1)] = x + y|x| + y > x + y|x|$

$= |x|(1+y) \geq 0$

(ii) Ομοίως για $y<0$.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Ας είναι $x, y \in \mathbb{Z}$, $y \neq 0$. Τότε $\exists! r, q \in \mathbb{Z}$ με $x = yq + r$ και $0 \leq r < |y|$

υπάρχει ακριβώς

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Θεωρούμε το σύνολο $X = \{w = x - yv \geq 0, v \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{N}_0$

Είναι $X \neq \emptyset$

Ας είναι $r = \min X \geq 0$. Τότε $r > r - |y|$. Ας είναι $r = x - yq$ για κάποιο $q \in \mathbb{Z}$.

Τότε $r > r - |y|$ $(\mp y)$

$= x - yq - |y|$

$= x - y(q \pm 1)$ → του τύπου του X, αλλά $< r$ $\Rightarrow x - y(q+1) < 0$

$0 \leq r < y$

Ας είναι $x = yq_1 + r_1$, $x = yq_2 + r_2$ | $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r_1, r_2 \leq |y|$

Τότε $0 = y(q_1 - q_2) + r_1 - r_2$ $\quad 0 \leq r_1 < r_2 < |y|$

$|y| > |r_2 - r_1| = |y|(q_1 - q_2)$

$|y| > |y||q_1 - q_2|$

$1 > |q_1 - q_2| \geq 0 \Rightarrow |q_1 - q_2| = 0 \Rightarrow q = q_2 \Rightarrow$

$0 \leq r < |y|$

▶ $\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} : \exists \alpha \in \mathbb{Z},\ \beta \in \mathbb{N}$ με $x = \alpha \cdot \beta^{-1}\}$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Το $\mathbb{Q}$ είναι το ελάχιστο υπόσωμα του $\mathbb{R}$.

$A_\nu \subseteq \Omega \quad \nu \in \mathbb{N}$

(*) $\liminf A_\nu = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{\nu \geq k} A_\nu \right)$

(*) $\limsup A_\nu = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{\nu \geq k} A_\nu \right)$

$x \in \limsup A_\nu$
$x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{\nu \geq k} A_\nu \right)$ $\Rightarrow x \in \left(\bigcup_{\nu \geq k} A_\nu \right),\ \forall k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \exists \nu \geq k,\ x \in A_\nu,\ \forall k \in \mathbb{N}$

(ΑΣΚΗΣΕΙΣ 49, 50)

ΑΣΚΗΣΗ

$\limsup (A_\nu \cap B_\nu) \subseteq \limsup A_\nu \cap \lim B_\nu$

$x \in \limsup (A_\nu \cap B_\nu)$

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ \exists \nu \geq k : x \in (A_\nu \cap B_\nu)$
$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ \exists \nu \geq k : x \in A_\nu \wedge x \in B_\nu$

δηλ. $\forall k \in \mathbb{N},\ \exists \nu \in \mathbb{N}$ $\nu \geq k$ με $x \in A_\nu$ και $\forall k \in \mathbb{N},\ \exists \nu \in \mathbb{N}$ με $x \in B_\nu$

$\Rightarrow x \in \limsup A_\nu \wedge x \in \limsup B_\nu$
$\Rightarrow x \in (\limsup A_\nu) \cap (\limsup B_\nu)$